ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Е. А. Бакланов

Новосибирск, 2023

Слабый закон больших чисел

Настоящий параграф посвящён одному из основных утверждений теории вероятностей — закону больших чисел.

Определение

Говорят, что последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет *слабому закону больших чисел*, если существуют такие последовательности постоянных $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ и $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$, $0 < b_n \uparrow \infty$, что

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a_n \xrightarrow{P} 0. \tag{3.3}$$

Теорема 3.2 (слабый закон больших чисел)

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин. Для того чтобы*

$$\frac{S_n}{n} - \mathsf{E}(X_1 I(|X_1| < n)) \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty, \tag{3.4}$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$n\mathsf{P}(|X_1| \geqslant n) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.5}$$

Слабый закон больших чисел

Замечание

Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ имеют конечное математическое ожидание, то выполнено условие (3.5) и $\mathsf{E}(X_1 I(|X_1| < n)) \to \mathsf{E}X_1$, и, следовательно, $S_n/n \xrightarrow{P} \mathsf{E}X_1$. С другой стороны, предел $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}(X_1 I(|X_1| < n))$ может существовать и при отсутствии математического ожидания. В частности, если X_1 имеет симметричное распределение, то, очевидно, $\mathsf{E}(X_1 I(|X_1| < n)) = 0$. Таким образом, слабый закон больших чисел применим и к некоторым случайным величинам, не имеющим математического ожидания.

Слабый закон больших чисел

Доказательство

Достаточность.

Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим $Y_j = X_j I(|X_j| < n)$, $T_n = \sum\limits_{j=1}^{n} Y_j$, $\mu_n = \mathsf{E}(X_1 I(|X_1| < n))$. Отметим, что $\mathsf{E}Y_j = \mu_n$ и $\mathsf{E}T_n = n\mu_n$. Далее, так как

$$\{S_n = T_n\} \cap \{|T_n - n\mu_n| < n\varepsilon\} \subseteq \{|S_n - n\mu_n| < n\varepsilon\}$$

и

$$\{S_n \neq T_n\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \{|X_j| \geqslant n\},$$

Доказательство

то, применяя неравенство Чебышёва (1.3), получаем:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(|S_n - n\mu_n| \geqslant n\varepsilon) &\leqslant \mathsf{P}(|T_n - n\mu_n| \geqslant n\varepsilon) + n\mathsf{P}(|X_1| \geqslant n) \leqslant \\ &\leqslant \frac{\mathsf{D}T_n}{n^2\varepsilon^2} + n\mathsf{P}(|X_1| \geqslant n) = \\ &= \frac{\mathsf{D}Y_1}{n\varepsilon^2} + n\mathsf{P}(|X_1| \geqslant n). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Доказательство

Так как $k^2 \leqslant k(k+1) = 2\sum\limits_{j=1}^{k} j$, то

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}Y_1 &\leqslant \mathsf{E}Y_1^2 = \mathsf{E}(X_1^2; |X_1| < n) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{E}(X_1^2; k-1 \leqslant |X_1| < k) \leqslant \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} k^2 \mathsf{P}(k-1 \leqslant |X_1| < k) \leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} j\mathsf{P}(k-1 \leqslant |X_1| < k) = \\
&= 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} j\mathsf{P}(k-1 \leqslant |X_1| < k) = 2\sum_{j=1}^{n} j\mathsf{P}(j-1 \leqslant |X_1| < n) \leqslant \\
&\leqslant 2\sum_{j=1}^{n} j\mathsf{P}(|X_1| \geqslant j-1).
\end{aligned}$$

Доказательство

Следовательно, в силу (3.5) и (3.19) (лемма Тёплица)

$$\frac{\mathsf{D}Y_1}{n} \leqslant \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} j\mathsf{P}(|X_1| \geqslant j-1) \to 0.$$

Отсюда и из (3.6) следует (3.4).

Слабый закон больших чисел

Доказательство

Необходимость.

Пусть X_1 имеет симметричное распределение. Тогда, очевидно, $\mu_n = 0$. Из неравенств (2.37) и (2.26) получаем:

$$\mathsf{P}(|S_n| \geqslant n\varepsilon) \geqslant \frac{1}{2}\mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant n\varepsilon) \geqslant \frac{1}{2}\mathsf{P}(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |X_j| \geqslant 2n\varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(1 - \mathsf{P}(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |X_j| < 2n\varepsilon)\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 - \mathsf{P}^n(|X_1| < 2n\varepsilon)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(1 - (1 - \mathsf{P}(|X_1| \geqslant 2n\varepsilon))^n\Big) \geqslant \frac{1}{2}\Big(1 - e^{-n\mathsf{P}(|X_1|\geqslant 2n\varepsilon)}\Big).$$

Последнее неравенство следует из очевидного соотношения $1 - x \leqslant e^{-x}$.

Слабый закон больших чисел

Доказательство

Следовательно,

$$0 \leqslant \frac{1}{2}\left(1 - e^{-n\mathsf{P}(|X_1| \geqslant 2n\varepsilon)}\right) \leqslant \mathsf{P}(|S_n| \geqslant n\varepsilon) \to 0. \qquad (3.7)$$

Отсюда следует (3.5).

Слабый закон больших чисел

Доказательство

Пусть теперь X_1 имеет произвольное распределение.
Обозначим, как и ранее, X_j^s симметризацию случайной величины X_j, и пусть $S_n^s = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j^s$.
В силу правого неравенства (2.34) имеем

$$\mathsf{P}(|S_n^s| \geqslant n\varepsilon) \leqslant 2\mathsf{P}(|S_n - n\mu_n| \geqslant n\varepsilon/2) \to 0, \quad n \to \infty,$$

то есть

$$\frac{S_n^s}{n} \xrightarrow{P} 0.$$

Значит, по только что доказанному,

$$n\mathsf{P}(|X_1^s| \geqslant n) \to 0.$$

Доказательство

Далее, в силу левого неравенства (2.34)

$$n\mathsf{P}(|X_1| \geqslant n + |\mathrm{med}(X_1)|) \leqslant n\mathsf{P}(|X_1 - \mathrm{med}(X_1)| \geqslant n) \leqslant 2n\mathsf{P}(|X_1^s| \geqslant n),$$

откуда следует (3.5). □

Слабый закон больших чисел

Теорема 3.2 и неравенство

$$n\mathsf{P}(|X_1| \geqslant n) = n\mathsf{E}I(|X_1| \geqslant n) \leqslant \mathsf{E}(|X_1|I(|X_1| \geqslant n))$$

приводят к следующему утверждению.

Теорема 3.3

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин. Если $\mathsf{E}|X_1| < \infty$, то

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mathsf{E}X_1.$$

Теорема 3.4 (слабый закон больших чисел Марцинкевича — Зигмунда)

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность независимых и одинаково распределённых случайных величин. Пусть* $\mathsf{E}|X_1|^\alpha < \infty$ *для некоторого* $0 < \alpha < 2$ *и пусть* $\mathsf{E}X_1 = 0$ *в случае* $1 \leqslant \alpha < 2$. *Тогда*

$$\frac{S_n}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty. \tag{3.8}$$

Доказательство

Случай $\alpha = 1$ содержится в теореме 3.3.

Рассмотрим случай $1 < \alpha < 2$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим $Y_j = X_j I(|X_j| < \varepsilon^\delta n^{1/\alpha})$, $T_n = \sum\limits_{j=1}^{n} Y_j$, где $\delta = 3/(2-\alpha) > 0$.
Тогда, так же как и при доказательстве теоремы 3.2, получаем:

Слабый закон больших чисел

Доказательство

$$
\begin{aligned}
\mathsf{P}(|S_n - \mathsf{E}T_n| \geqslant \varepsilon n^{1/\alpha}) &\leqslant \frac{n\mathsf{D}Y_1}{n^{2/\alpha}\varepsilon^2} + n\mathsf{P}(|X_1| \geqslant \varepsilon^\delta n^{1/\alpha}) \leqslant \\
&\leqslant \frac{n\mathsf{E}Y_1^2}{n^{2/\alpha}\varepsilon^2} + n\mathsf{P}(|X_1|^\alpha \geqslant \varepsilon^{\alpha\delta} n) \leqslant \\
&\leqslant \frac{n(\varepsilon^\delta n^{1/\alpha})^{2-\alpha}\mathsf{E}(|X_1|^\alpha I(|X_1| < \varepsilon^\delta n^{1/\alpha}))}{n^{2/\alpha}\varepsilon^2} + \\
&+ n\mathsf{P}(|X_1|^\alpha \geqslant \varepsilon^{\alpha\delta} n) \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon\mathsf{E}|X_1|^\alpha + n\mathsf{P}(|X_1|^\alpha \geqslant \varepsilon^{\alpha\delta} n).
\end{aligned}
$$

Доказательство

Так как $\mathsf{E}|X_1|^\alpha < \infty$, то $n\mathsf{P}(|X_1|^\alpha \geqslant \varepsilon^{\alpha\delta} n) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}(|S_n - \mathsf{E}T_n| \geqslant \varepsilon n^{1/\alpha}) \leqslant \varepsilon \mathsf{E}|X_1|^\alpha.$$

Отсюда, в силу произвольности ε, следует, что

$$\frac{S_n - \mathsf{E}T_n}{n^{1/\alpha}} \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty.$$

Доказательство

Покажем, что $\mathsf{E}T_n/n^{1/\alpha} \to 0$ при $n \to \infty$. Так как $\mathsf{E}X_1 = 0$ и $\mathsf{E}|X_1|^\alpha < \infty$, то

$$\begin{aligned}
|\mathsf{E}T_n/n^{1/\alpha}| &= |n^{-1/\alpha}n\mathsf{E}(X_1 I(|X_1| < \varepsilon^\delta n^{1/\alpha}))| = \\
&= |n^{-1/\alpha}n\mathsf{E}(X_1 I(|X_1| \geqslant \varepsilon^\delta n^{1/\alpha}))| \leqslant \\
&\leqslant n^{1-1/\alpha}(\varepsilon^\delta n^{1/\alpha})^{1-\alpha}\mathsf{E}\big(|X_1|^\alpha I(|X_1| \geqslant \varepsilon^\delta n^{1/\alpha})\big) = \\
&= \varepsilon^{\delta(1-\alpha)}\mathsf{E}\big(|X_1|^\alpha I(|X_1| \geqslant \varepsilon^\delta n^{1/\alpha})\big) \to 0, \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Доказательство

Пусть теперь $0 < \alpha < 1$.
Из условия $\mathsf{E}|X_1|^\alpha < \infty$ следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $M > 0$ настолько большим, что $\mathsf{E}\big(|X_1|^\alpha I(|X_1| \geqslant M)\big) < \varepsilon$.
Обозначим $Y_j = X_j I(|X_j| < M)$, $Z_j = X_j I(|X_j| \geqslant M)$. Используя C_r-неравенство (1.12), получаем:

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}|S_n|^\alpha &\leqslant \mathsf{E}\Big|\sum_{j=1}^n Y_j\Big|^\alpha + \mathsf{E}\Big|\sum_{j=1}^n Z_j\Big|^\alpha \leqslant (nM)^\alpha + n\mathsf{E}|Z_1|^\alpha = \\
&= (nM)^\alpha + n\mathsf{E}\big(|X_1|^\alpha I(|X_1| \geqslant M)\big) \leqslant (nM)^\alpha + n\varepsilon,
\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathsf{E}|S_n|^\alpha}{n} \leqslant \varepsilon.$$

Применяя неравенство Маркова (1.2), отсюда получаем $S_n/n^{1/\alpha} \xrightarrow{P} 0$

Теперь мы получим необходимые и достаточные условия выполнения слабого закона больших чисел для произвольных независимых случайных величин.

Пусть $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ — возрастающая последовательность положительных чисел: $b_n > 0$, $b_n \uparrow \infty$.

Определим *срезку* $X^{[\varepsilon]}$ случайной величины X равенством

$$X^{[\varepsilon]} = XI(|X| < \varepsilon) = \begin{cases} X, & |X| < \varepsilon; \\ 0, & |X| \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Слабый закон больших чисел

Теорема 3.5

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ *— последовательность независимых случайных величин. Обозначим* $\mu_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathsf{E}(X_k I(|X_k| < b_n))$. *Если выполнены условия*

$$\sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(|X_k| \geqslant b_n) \to 0, \quad n \to \infty, \tag{3.9}$$

и

$$\frac{1}{b_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{D} X_k^{[b_n]} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{3.10}$$

то

$$\frac{S_n - \mu_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty. \tag{3.11}$$

Если $S_n/b_n \xrightarrow{P} 0$, *то справедливы соотношения (3.9), (3.10) и* $\mu_n/b_n \to 0$.

Доказательство

Обозначим $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k^{[b_n]}$. Заметим, что $\mu_n = \mathsf{E} T_n$,

$\{S_n \neq T_n\} \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} \{|X_k| \geqslant b_n\}$ и

$$\{S_n = T_n\} \cap \{|T_n - \mu_n| < \varepsilon b_n\} \subseteq \{|S_n - \mu_n| < \varepsilon b_n\}.$$

Теперь, применяя неравенство Чебышёва (1.3), получаем:

$$\mathsf{P}(|S_n - \mu_n| \geqslant \varepsilon b_n) \leqslant \frac{1}{b_n^2 \varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{D} X_k^{[b_n]} + \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(|X_k| \geqslant b_n).$$

Отсюда, в силу (3.9) и (3.10), немедленно следует (3.11).

Доказательство

Пусть имеет место сходимость $S_n/b_n \xrightarrow{P} 0$.
Пусть случайные величины X_k имеют симметричное распределение.
Тогда $\mathsf{E}(X_k I(|X_k| < b_n)) = 0$ и, следовательно, $\mu_n = 0$.
Из неравенств (2.37) и (2.26) получаем:

$$\mathsf{P}(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |X_j| \geqslant 2\varepsilon b_n) \leqslant \mathsf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon b_n) \leqslant 2\mathsf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon b_n) \to 0.$$

Слабый закон больших чисел

Доказательство

С другой стороны, используя неравенство $1 - x \leqslant e^{-x}$, находим

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |X_j| \geqslant b_n) &= 1 - \mathsf{P}(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |X_j| < b_n) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \mathsf{P}(|X_k| < b_n) = \\
&= 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathsf{P}(|X_k| \geqslant b_n)) \geqslant \\
&\geqslant 1 - \exp\left\{ - \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(|X_k| \geqslant b_n) \right\} \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует (3.9).

Доказательство

Докажем (3.10). Так как $S_n/b_n \xrightarrow{P} 0$ и

$$\mathsf{P}(|S_n - T_n| \geqslant \varepsilon b_n) \leqslant \mathsf{P}(S_n \neq T_n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(|X_k| \geqslant b_n) \to 0, \qquad (3.12)$$

то $T_n/b_n \xrightarrow{P} 0$.
Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $n \geqslant n_0$

$$\mathsf{P}(|T_n| \geqslant \varepsilon b_n) = \mathsf{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k^{[b_n]}}{b_n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \delta < 1/2.$$

Слабый закон больших чисел

Доказательство

Отсюда, используя неравенство Леви (2.26), получаем:

$$\mathsf{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{k}\frac{X_j^{[b_n]}}{b_n}\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant 2\mathsf{P}\left(\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{X_k^{[b_n]}}{b_n}\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant 2\delta<1$$

для всех $n\geqslant n_0$.

Доказательство

Далее, так как $\mathsf{E}(X_k^{[b_n]}/b_n) = 0$ и $\mathsf{P}(|X_k^{[b_n]}/b_n| \leqslant 1) = 1$, то из (2.32) находим

$$\frac{1}{b_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{D} X_k^{[b_n]} \leqslant \varepsilon^2 + (1+\varepsilon)^2 \, \frac{2\delta}{1-2\delta}.$$

Выбирая n_0 настолько большим, что $2\delta < \varepsilon/(1+\varepsilon)$, окончательно получаем:

$$\frac{1}{b_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathsf{D} X_k^{[b_n]} \leqslant \varepsilon^2 + \varepsilon(1+\varepsilon)^2,$$

откуда, в силу произвольности ε, следует условие (3.10).

Доказательство

Пусть теперь X_k имеют произвольное распределение.
Обозначим X_k^s симметризацию случайной величины X_k, и пусть $S_n^s = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k^s$. В силу правого неравенства (2.34) имеем

$$\mathsf{P}(|S_n^s| \geqslant \varepsilon b_n) \leqslant 2\mathsf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon b_n/2) \to 0,$$

то есть

$$\frac{S_n^s}{b_n} \xrightarrow{P} 0.$$

Значит, в силу только что доказанного,

$$\sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(|X_k^s| \geqslant b_n) \to 0.$$

Слабый закон больших чисел

Доказательство

Отсюда, в силу левого неравенства (2.34),

$$\sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(|X_k - \mathrm{med}(X_k)| \geqslant b_n) \to 0. \tag{3.13}$$

Так как $S_n/b_n \xrightarrow{P} 0$ и $0 < b_{n-1}/b_n < 1$, то

$$\frac{X_n}{b_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{b_n} = \frac{S_n}{b_n} - \frac{b_{n-1}}{b_n}\frac{S_{n-1}}{b_{n-1}} \xrightarrow{P} 0.$$

Доказательство

Пусть ε и δ — произвольные положительные числа. Используя предположение о возрастании последовательности $\{b_n\}_{n \geqslant 1}$, получаем:

$$\mathsf{P}(|X_k| \geqslant \varepsilon b_n) \leqslant \mathsf{P}(|X_k| \geqslant \varepsilon b_k) < \delta,$$

если $N \leqslant k \leqslant n$ и N — достаточно большое число. Если же $1 \leqslant k < N$, то $X_k/b_n \xrightarrow{P} 0$ в силу условия $b_n \uparrow \infty$. Итак, $\mathsf{P}(|X_k| \geqslant \varepsilon b_n) < \delta$ для всех $1 \leqslant k \leqslant n$ и всех достаточно больших n. Полагая $\delta = 1/2$, из определения медианы получаем $|\mathrm{med}(X_k)| \leqslant \varepsilon b_n$ для всех $1 \leqslant k \leqslant n$ и всех достаточно больших n.

Слабый закон больших чисел

Доказательство

Следовательно, из (3.13) получаем, что для всех $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(|X_k| \geqslant \varepsilon b_n) &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(|X_k - \mathrm{med}(X_k)| \geqslant \varepsilon b_n/2) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(|\mathrm{med}(X_k)| \geqslant \varepsilon b_n/2) \to 0,\end{aligned}$$

откуда следует (3.9).

Слабый закон больших чисел

Доказательство

Так как $\mathsf{D}X^s = 2\mathsf{D}X$, то в силу доказанного для симметрично распределённых случайных величин

$$\frac{1}{b_n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{D}X_k^{[b_n]} = \frac{1}{2b_n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{D}(X_k^{[b_n]})^s \to 0,$$

что и доказывает соотношение (3.10).

Слабый закон больших чисел

Доказательство

Осталось доказать, что $\mu_n/b_n \to 0$. Так как $S_n/b_n \xrightarrow{P} 0$, то из (3.12) и уже доказанного (3.9) следует, что $T_n/b_n \xrightarrow{P} 0$. Из условия (3.10) и неравенства Чебышёва следует, что $(T_n - \mu_n)/b_n \xrightarrow{P} 0$. Следовательно,

$$\frac{\mu_n}{b_n} = \frac{T_n}{b_n} - \frac{T_n - \mu_n}{b_n} \to 0.$$

$\square$